Том 26, № 135 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-234-240
УДК 517.97, 517.988.38

Вариационные принципы Экланда и Бишопа–Фелпса в частично упорядоченных пространствах

Зухра Тагировна ЖУКОВСКАЯ[1], **Татьяна Владимировна ЖУКОВСКАЯ**[2], **Ольга Викторовна ФИЛИППОВА**[3]

[1] ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

[2] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106

[3] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. В работе получено утверждение о минимуме графика отображения, действующего в частично упорядоченных пространствах. В доказательстве этого утверждения используется теорема о минимуме отображения в частично упорядоченном пространстве из статьи [A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy. Caristi-like condition and the existence of minima of mappings in partially ordered spaces // Journal of Optimization Theory and Applications. 2018. V. 180. Iss. 1, 48–61]. Также в данной работе показано, что это утверждение является аналогом вариационных принципов Экланда и Бишора–Фелпса — эффективных инструментов исследования экстремальных задач для функционалов, заданных на метрических пространствах. А именно, полученное в данной работе утверждение, примененное к частично упорядоченному пространству, созданному из метрического пространства введением в нем аналогов отношения порядка Бишопа–Фелпса, равносильно классическим вариационным принципам Экланда и Бишора–Фелпса.

Ключевые слова: частично упорядоченное пространство, вариационные принципы, неравенство типа Каристи, инфимум функционала

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00080_а).

Для цитирования: *Жуковская З.Т., Жуковская Т.В., Филиппова О.В.* Вариационные принципы Экланда и Бишопа–Фелпса в частично упорядоченных пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 234–240.
DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-234-240.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-234-240

Eckland and Bishop–Phelps variational principles in partially ordered spaces

Zukhra T. ZHUKOVSKAYA[1] **, Tatiana V. ZHUKOVSKAIA**[2] **, Olga V. Filippova**[3]

[1] V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation
[2] Tambov State Technical University
106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation
[3] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. In this paper, an assertion about the minimum of the graph of a mapping acting in partially ordered spaces is obtained. The proof of this statement uses the theorem on the minimum of a mapping in a partially ordered space from [A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy. Caristi-like condition and the existence of minima of mappings in partially ordered spaces // Journal of Optimization Theory and Applications. 2018. V. 180. Iss. 1, 48–61]. It is also shown that this statement is an analogue of the Eckland and Bishop–Phelps variational principles which are effective tools for studying extremal problems for functionals defined on metric spaces. Namely, the statement obtained in this paper and applied to a partially ordered space created from a metric space by introducing analogs of the Bishop–Phelps order relation, is equivalent to the classical Eckland and Bishop–Phelps variational principles.

Keywords: partially ordered space, variational principles, Caristi-like inequality, infimum of a functional

Mathematics Subject Classification: 58E30, 49J52, 06A06.

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00080_a).

For citation: Zhukovskaya Z.T, Zhukovskaya T.V., Filippova O.V. Variacionnye principy Eklanda i Bishopa–Felpsa v chastichno uporyadochennyh prostranstvah [Eckland and Bishop–Phelps variational principles in partially ordered spaces]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 135, pp. 234–240. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-234-240. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, (X, ρ) — полное метрическое пространство, $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — собственный функционал (т. е. $\{x \in X : U(x) \neq +\infty\} \neq \emptyset$), который полунепрерывен снизу и ограничен снизу. Сформулируем необходимые в данной работе вариационные принципы нелинейного анализа.

Следующее утверждение называют вариационным принципом Экланда.

Теорема 0.1 (см. [1]). *Для любых $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ и для любого $x_0 \in X$ такого, что*

$$U(x_0) \leq \varepsilon + \inf_{x \in X} U(x),$$

существует $\overline{x} \in X$, удовлетворяющий неравенствам

$$U(\overline{x}) \leq U(x_0), \quad \rho(\overline{x}, x_0) \leq \lambda, \tag{0.1}$$

$$\forall x \neq \overline{x} \;\; U(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(x, \overline{x}) > U(\overline{x}). \tag{0.2}$$

Теперь приведем вариационный принцип Бишопа–Фелпса.

Теорема 0.2 (см., например, теорему 2.1 в [2]). *Для произвольного $c > 0$ и любого $x_0 \in X$ такого, что $U(x_0) < +\infty$, существует $\overline{x} \in X$, удовлетворяющий неравенствам*

$$U(\overline{x}) + c\rho(x_0, \overline{x}) \leq U(x_0), \tag{0.3}$$

$$\forall x \neq \overline{x} \;\; U(x) + c\rho(\overline{x}, x) > U(\overline{x}). \tag{0.4}$$

В [3] было доказано, что вариационные принципы Экланда и Бишопа–Фелпса эквивалентны полученной в [4] теореме о достижении минимума функционала U, если этот функционал удовлетворяет следующему условию

$$\exists k > 0 \;\; \forall x \in X \;\; U(x) \neq \inf_{z \in X} U(z) \;\Rightarrow\; \exists x' \in X \setminus \{x\} \;\; U(x') + k\rho(x', x) \leq U(x). \tag{0.5}$$

Условие (0.5) называют условием типа Каристи, оно аналогично неравенству, введенному Дж. Каристи в качестве условия существования неподвижных точек (см. [5]). С использованием [4, теорема 3] в работе [6] были определены классы неограниченных снизу функций, для которых оказываются справедливыми утверждения вариационных принципов Экланда и Бишопа–Фелпса, и эти результаты были применены к исследованию липшицевых отображений. Результаты [4] были развиты в [7] применительно к функционалам, зависящим от параметров.

В работе [8] результаты [4] были распространены на отображения, действующие из одного частично упорядоченного пространства в другое, и для таких отображений были получены условия достижения минимальных значений. Естественно, возник вопрос: можно ли из теоремы [8] получить утверждение, которое играло бы в анализе отображений частично упорядоченных пространств роль, аналогичную роли принципа Экланда. В данной статье предлагается такое утверждение.

1. Основной результат

1.1. Вариационные принципы в частично упорядоченном пространстве

Пусть заданы частично упорядоченные пространства $X = (X, \preceq)$ и $Y = (Y, \preceq)$ и отображение $U : X \to Y$. Напомним, что отображение U называют строго изотонным на множестве $X_0 \subset X$, если для любых $x, x' \in X_0$ таких, что $x' \prec x$ выполнено $U(x') \prec U(x)$. Будем обозначать через $\operatorname{Min} Y$ — множество минимальных элементов пространства Y, то есть

$$\forall \overline{y} \in \operatorname{Min} Y \quad \forall y \in Y \quad y \not\prec \overline{y}.$$

В [8] определено следующее условие, названное *условием типа Каристи* (*для частично упорядоченных пространств*):

(K) *для любого* $x \in X$, *если* $U(x) \notin \operatorname{Min} Y$, *то существует такой* $x' \in X$, *что*

$$x' \prec x, \quad U(x') \prec U(x). \tag{1.1}$$

Сформулируем полученное в работе [8] утверждение о достижении отображением $U : X \to Y$ минимальной точки пространства Y.

Теорема 1.1 (см. [8]). *Пусть выполнены условие* (K) *и условие*

(S) *произвольная бесконечная цепь* $S \subset X$, *сужение на которую отображения* U *является строго изотонным, имеет нижнюю границу* $w \in X$, *удовлетворяющую неравенству* $U(w) \prec U(x)$ *при всех* $x \in S$, $x \neq w$.

Тогда

$$U(X) \cap \operatorname{Min} Y \neq \varnothing,$$

и более того, для любого $x_0 \in X$ *существует такой* $\overline{x} \in X$, $\overline{x} \preceq x_0$, *что*

$$U(\overline{x}) \in \operatorname{Min} Y, \tag{1.2}$$

$$U(\overline{x}) \preceq U(x_0). \tag{1.3}$$

Теперь приведем основной результат данной работы, который можно считать аналогом вариационных принципов Экланда и Бишопа–Фелпса для частично упорядоченных пространств, и который тесно связан с теоремой 1.1.

Определим на графике $\operatorname{gph} U = \{(x, U(x))\} \subset X \times Y$ отображения $U : X \to Y$ отношение порядка, полагая для любых $(x, y) \in \operatorname{gph} U$, $(x', y') \in \operatorname{gph} U$ выполненным строгое неравенство $(x', y') \prec (x, y)$ тогда и только тогда, когда $x' \prec x$ и $y' \prec y$.

Теорема 1.2. *Пусть выполнено условие* (S). *Тогда для любого* $x_0 \in X$ *существует* $\overline{x} \in X$ *такой, что* $\overline{x} \preceq x_0$ *и*

$$\big(\overline{x}, U(\overline{x})\big) \in \operatorname{Min} \operatorname{gph} U. \tag{1.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение (1.4) означает, что при любом $x \in X$ выполнено $\big(x, U(x)\big) \not\prec \big(\overline{x}, U(\overline{x})\big)$. Таким образом, включение (1.4) будет выполнено тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in X \quad x \not\prec \overline{x} \ \text{ или } \ U(x) \not\prec U(\overline{x}). \tag{1.5}$$

Определим подпространство $X_0 = \{x \in X : x \preceq x_0\}$ частично упорядоченного пространства X. Сужение отображения $U : X \to Y$ на подпространство X_0 будем обозначать символом U_0. Заметим, что из выполнения условия (S) для исходного отображения $U : X \to Y$ следует, что его сужение $U_0 : X_0 \to Y$ также удовлетворяет условию (S).

Рассмотрим две взаимоисключающие ситуации: отображение U_0 удовлетворяет условию (K) и не удовлетворяет этому же условию (K). Вначале, пусть условие (K) выполнено. Тогда, согласно теореме 1.1, существует $\overline{x} \preceq x_0$ такой, что справедливо (1.2), то есть для любого $x \in X_0$ имеем $U_0(x) \not\prec U_0(\overline{x})$. Эти соотношения означают, что если $x \preceq x_0$, то и для исходного отображения U выполнено $U(x) \not\prec U(\overline{x})$. Поэтому в данном случае существует $\overline{x}$, для которого соотношение (1.5) выполнено.

Пусть теперь отображение U_0 не удовлетворяет условию (K). Это означает, что существует $\overline{x} \in X_0$ такой, что $U_0(\overline{x}) \notin \operatorname{Min} Y$ и для любого $x \in X_0$ выполнено $x \not\prec \overline{x}$ или $U_0(x) \not\prec U_0(\overline{x})$. Таким образом, определен элемент $\overline{x} \in X$, $\overline{x} \preceq x_0$, для которого $x \not\prec \overline{x}$ или $U(x) \not\prec U(\overline{x})$ при всех $x \in X_0$. Если же $x \notin X_0$, то очевидно $x \not\prec \overline{x}$. Итак, и в этом случае существует $\overline{x}$, для которого соотношение (1.5) выполнено. □

1.2. Связь с принципом Экланда в метрическом пространстве

Использование порядка, предложенного Бишопом и Фелпсом (см. [9, теорема 7.5.1]), позволяет устанавливать взаимосвязь между на первый взгляд далекими результатами анализа в метрических и частично упорядоченных пространствах. Здесь мы применим эту идею, чтобы показать как из теоремы 1.2 выводится «классический» принцип Экланда (для отображений метрических пространств).

Итак, пусть $X \doteq (X, \rho)$ — полное метрическое пространство и задан собственный функционал $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$, являющийся ограниченным снизу и полунепрерывным снизу. Пусть также заданы числа $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ и элемент $x_0 \in X$ такой, что

$$U(x_0) \leq \varepsilon + \inf_{x \in X} U(x). \tag{1.6}$$

Зададим на X порядок соотношением

$$x_2 \preceq x_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(x_1, x_2) \leq U(x_1) - U(x_2). \tag{1.7}$$

В работе [8] показано, что при таком определении порядка в X отображение U, действующее из $(X, \preceq)$ в $\overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяет условию (S).

Из теоремы 1.2 следует, что существует $\overline{x} \in X$, $\overline{x} \preceq x_0$, удовлетворяющий соотношению (1.5). Неравенство $\overline{x} \preceq x_0$ означает, что $\dfrac{\varepsilon}{\lambda}\rho(\overline{x}, x_0) \leq U(x_0) - U(\overline{x})$. Отсюда, учитывая (1.6), получаем $\dfrac{\varepsilon}{\lambda}\rho(\overline{x}, x_0) \leq \varepsilon + \inf\limits_{x \in X} U(x) - U(\overline{x}) \leq \varepsilon$. Следовательно, выполнено $\rho(\overline{x}, x_0) \leq \lambda$ и $U(\overline{x}) \leq U(x_0)$, то есть оба неравенства (0.1) справедливы.

В рассматриваемых упорядоченных пространствах для любых $x \in X$, $x \neq \overline{x}$, соотношение (1.5) записывается в виде

$$\frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(\overline{x}, x) \nleq U(\overline{x}) - U(x) \;\text{ или }\; U(x) \not< U(\overline{x}).$$

Полученные соотношения равносильны совокупности неравенств

$$\frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(\overline{x}, x) > U(\overline{x}) - U(x) \;\text{ или }\; U(x) \geq U(\overline{x}).$$

В этой совокупности из второго неравенства, очевидно, следует первое. Действительно,

$$U(x) \geq U(\overline{x}) \;\Rightarrow\; U(\overline{x}) - U(x) \leq 0 < \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(\overline{x}, x) \;\text{ при }\; x \neq \overline{x}.$$

Таким образом, доказано, что при всех $x \neq \overline{x}$ выполнено $\dfrac{\varepsilon}{\lambda}\rho(\overline{x}, x) > U(\overline{x}) - U(x)$, то есть установлена справедливость неравенства (0.2).

Итак, теорема 0.1 — вариационный принцип Экланда доказана.

1.3. Связь с принципом Бишопа–Фелпса в метрическом пространстве

В заключение продемонстрируем, как из теоремы 1.2 выводится теорема 0.2 — вариационный принцип Бишопа–Фелпса.

Как и в предыдущем пункте, здесь $X \doteq (X, \rho)$ — полное метрическое пространство, $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — собственный функционал, являющийся ограниченным снизу и полунепрерывным снизу. Пусть заданы число $c > 0$ и элемент $x_0 \in X$, такой, что $U(x_0) < +\infty$. Зададим на X порядок соотношением

$$x_2 \preceq x_1 \quad \Leftrightarrow \quad c\rho(x_1, x_2) \leq U(x_1) - U(x_2). \tag{1.8}$$

При таком определении порядка в X отображение U, действующее из $(X, \preceq)$ в $\overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяет условию (S) (см. [8]).

Из теоремы 1.2 следует, что существует $\overline{x} \in X$, $\overline{x} \preceq x_0$, удовлетворяющий соотношению (1.5). Неравенство $\overline{x} \preceq x_0$ означает, что $c\rho(\overline{x}, x_0) \leq U(x_0) - U(\overline{x})$, и таким образом, справедливо неравенство (0.3) в утверждении теоремы 0.2.

Соотношение (1.5) для рассматриваемых упорядоченных пространств означает, что при любом $x \in X$, $x \neq \overline{x}$, выполнено

$$c\rho(\overline{x}, x) \not\leq U(\overline{x}) - U(x) \;\text{ или }\; U(x) \not< U(\overline{x}),$$

то есть любой $x \in X$, $x \neq \overline{x}$, удовлетворяет совокупности неравенств

$$c\rho(\overline{x}, x) > U(\overline{x}) - U(x) \;\text{ или }\; U(x) \geq U(\overline{x}).$$

В этой совокупности из второго неравенства, очевидно, следует первое. Таким образом доказано, что при любом $x \in X$, $x \neq \overline{x}$, неравенство (0.4) выполнено.

Итак, принцип Экланда доказан.

References

[1] I. Ekeland, “Nonconvex minimization problems”, *Bulletin of the American Mathematical Society. New Series*, **1**:3 (1979), 443–474.

[2] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer–Verlag, New York, 2003, 690 pp.

[3] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, “Вариационные принципы в нелинейном анализе и их обобщение”, *Математические заметки*, **103**:6 (2018), 948–954; англ. пер.:A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, “Variational Principles in Nonlinear Analysis and Their Generalization”, *Mathematical Notes*, **103**:6 (2018), 1014–1019.

[4] А. В. Арутюнов, “Условие Каристи и существование минимума ограниченной снизу функции в метрическом пространстве. Приложения к теории точек совпадения”, *Оптимальное управление*, Сборник статей. К 105-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Труды МИАН, **291**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2015, 30–44; англ. пер.:A. V. Arutyunov, “Caristi’s condition and existence of a minimum of a lower bounded function in a metric space. Applications to the theory of coincidence points”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **291** (2015), 24–37.

[5] J. Caristi, “Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **215** (1976), 241–251.

[6] З. Т. Жуковская, С. Е. Жуковский, “Об обобщениях и приложениях вариационных принципов нелинейного анализа”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:123 (2018), 377–385. [Z. T. Zhukovskaya, S. E. Zhukovskiy, “On generalizations and applications of variational principles of nonlinear analysis”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:123 (2018), 377–385 (In Russian)].

[7] A. V. Arutyunov, B. D. Gel’man, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Caristi-like condition. Existence of solutions to equations and minima of functions in metric spaces”, *Fixed Point Theory*, **20**:1 (2019), 31–58.

[8] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Caristi-like condition and the existence of minima of mappings in partially ordered spaces”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **180**:1 (2019), 48–61.

[9] Ф. Кларк, *Оптимизация и негладкий анализ*, Наука, М., 1988, 280 с. [F. Clark, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1988 (In Russian)].

Информация об авторах

Жуковская Зухра Тагировна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4595-6685

Жуковская Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4374-4336

Филиппова Ольга Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: philippova.olga@rambler.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1612-9880

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Жуковская Татьяна Владимировна
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Поступила в редакцию 15.02.2021 г.
Поступила после рецензирования 12.04.2021 г.
Принята к публикации 10.09.2021 г.

Information about the authors

Zukhra T. Zhukovskaya, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4595-6685

Tatiana V. Zhukovskaia, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4374-4336

Olga V. Filippova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: philippova.olga@rambler.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1612-9880

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Tatiana V. Zhukovskaia
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Received 15.02.2021
Reviewed 12.04.2021
Accepted for press 10.09.2021